Приложение 7

**Модель транспортной задачи для АПК.**

Транспортировка продукции до пункта дальнейшей переработки или реализации является обязательным элементом процесса производства товаров. С позиций выпуска конечного продукта агропромышленного комплекса, являющегося материальным носителем добавленной стоимости, транспортировка продукции любой стадии готовности относится к промежуточному производственному потреблению, то есть к издержкам производителей. Таким образом, интересам АПК как агрегированного экономического агента, соответствует минимизация суммарных транспортных затрат.

С позиций индивидуального агента - отдельного производителя АПК, расходы на транспортировку продукции являются составной частью текущих материальных затрат. При прочих равных условиях, чем больше значение данной составляющей текущих материальных затрат, тем меньше добавленная стоимость, созданная производителем.

Если рассматривать АПК как целостную подсистему региональной экономики, а предприятия транспорта как ее элемент – подкомплекс в составе АПК, то инструментом для реализации интересов индивидуальных производителей и АПК в целом в минимизации транспортных издержек является транспортная задача. Рассмотрим ее подробнее.

Транспортная задача относится к категории оптимизационных задач. Чтобы решить транспортную задачу, необходимо составить ее математическую модель. С точки зрения входа и выхода модель характеризуется экзогенными и эндогенными факторами. Экзогенные факторы - все внешние параметры модели, значения которых задаются или заданы. Это "вход" модели. Эндогенные факторы представляют собой переменные, значения которых предстоит получить в результате решения задачи, а также показатель целевой функции. Это "выход" модели. Для обозначения эндогенных переменных иногда используют термин – инструментальные переменные.

Математическое выражение, которое в формализованном виде характеризует экономический интерес агента, называется целевой функцией или критерием оптимальности. Кроме того, модель содержит математические соотношения, связывающие экзогенные и эндогенные факторы и выступающие в качестве ограничений. Такие соотношения образуют систему. Система ограничений определяет область допустимых решений задачи.

Экзогенные и эндогенные факторы модели транспортной задачи охарактеризованы в табл. 1.

*Таблица 1*

**Экзогенные и эндогенные факторы модели транспортной задачи**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Экзогенные факторы** | **Ед. изм.** | **Эндогенные факторы** | **Ед. изм.** |
| 1. Количество предприятий-поставщиков (отправителей) груза | Физ.ед. | 1. Объемы продукции, доставляемой от каждого грузоотправителя до каждого грузополучателя | Физ.ед. |
| 2. Объемы товарной продукции предприятий АПК – отправителей груза, подлежащей доставке в пункты хранения, переработки или реализации. | Физ.ед. | 2. Значение целевой функции – минимальная суммарная стоимость перевозки грузов | Ден.ед |
| 3. Количество предприятий-получателей груза. | Физ.ед |  |  |
| 4. Объемы продукции, которая запланирована на хранение, переработку или реализацию предприятиями - получателями груза. | Физ.ед. |  |  |
| 5. Тарифы на доставку единицы груза от отправителя до получателя. | Ден.ед./физ.ед. |  |  |

Введем символические обозначения для экзогенных факторов модели транспортной задачи. Пусть количество отправителей обозначается символом , а символ обозначает порядковый номер отправителя груза. В записи модели это отражается следующим образом: . Для обозначения количества получателей груза будем использовать символ , а порядковый номер получателя обозначим как . Отразим это в записи модели: . Для транспортных тарифов используем обозначение , что соответствует стоимости доставки единицы груза от -го предприятия-отправителя до -го предприятия-получателя. Объемы продукции, предназначенной к отправке, обозначим , а объемы продукции, запланированной к получению, - .

В нашей модели транспортной задачи будем учитывать ту продукцию АПК, которая и произведена, и переработана (или реализована) внутри региона, поэтому суммарные объемы отправляемой и получаемой продукции совпадают, то есть: . Такие транспортные задачи называют закрытыми. Для понимания структуры модели отразим совокупность экзогенных факторов в виде табл. 2.

*Таблица 2*

**Характеристика исходных условий модели транспортной задачи и
 введенные обозначения**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Транспортные тарифы | Объем продукции к отправке |
| Получа-тель 1 | Получа-тель 2 | … | -ый получатель | … | Получа-тель  |
| Отправитель 1 |  |  | … |  | … |  |  |
| Отправитель 2 |  |  | … |  | … |  |  |
| …… | … | … | … | … | … | … | … |
| -ый отправитель |  |  |  |  |  |  |  |
| ……. | …. | …. | … | … | … | … | … |
| Отправитель  |  |  | … |  | … |  |  |
| Запланированные объемы продукции к получению |  |  | … |  | … |  |  |

Совокупность эндогенных переменных транспортной задачи обозначим символом . Элементами данного массива будут инструментальные переменные , каждая из которых соответствует объему продукции, доставляемой от -го предприятия-отправителя до -го предприятия-получателя. Массив инструментальных переменных образует матрицу . Такую же размерность имеет массив, образованный транспортными тарифами.

Целевая функция задачи, или критерий оптимальности - , при заданных исходных условиях зависит от инструментальных переменных: **.** Естественно, в модели следует указать направление желательного изменения значения – минимизация.

Исходя из введенных обозначений, запишем целевую функцию задачи – суммарную стоимость перевозки груза. Чтобы найти стоимость перевозки груза, следует умножить тариф на объем перевозимой продукции . Данная величина представляет собой стоимость доставки груза от -го предприятия-отправителя до -го предприятия-получателя. Затем необходимо сложить таких величин, в результате чего получим линейную функцию цели:

 .

Или в краткой записи:

 .

Ограничения в модели транспортной задачи закрытого типа являются равенствами. По смыслу, вся продукция производителей АПК, предназначенная к хранению, переработке или реализации в регионе, должна быть доставлена на предприятия, осуществляющие данные функции в регионе, и распределена между ними без остатка. Иными словами, планы предприятий-производителей по сумме объемов продукции в точности совпадают с планами предприятий-получателей груза – также по сумме объемов. В разрабатываемой модели должно быть уравнений, характеризующих распределение объемов транспортируемой продукции производителей между предприятиями-получателями. Также в модели должно быть уравнений, характеризующих распределение объемов доставляемой продукции между предприятиями-поставщиками. В силу физического смысла на значения инструментальных переменных налагается требование неотрицательности.

Для понимания структуры ограничений составим табл. 3, в которой отразим и экзогенные, и эндогенные факторы модели.

*Таблица 3*

**Характеристика ограничений модели транспортной задачи**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Инструментальные переменные модели | Объем продукции к отправке |
| Получа-тель 1 | Получа-тель 2 | … | -ый получатель | … | Получа-тель  |
| Отправитель 1 |  |  | … |  | … |  |  |
| Отправитель 2 |  |  | … |  | … |  |  |
| …… | … | … | … | … | … | … | … |
| -ый отправитель |  |  |  |  |  |  |  |
| ……. | …. | …. | … | … | … | … | … |
| Отправитель  |  |  | … |  | … |  |  |
| Запланированные объемы продукции к получению |  |  | … |  | … |  |  |

Суммируя объемы транспортируемой продукции по строкам и приравнивая эти суммы к -ым, мы выполняем условие, согласно которому должны быть реализованы планы отправителей. Суммируя объемы транспортируемой продукции по столбцам и приравнивая эти суммы к -ым, мы обеспечиваем выполнение планов получателей продукции. Таким образом, система ограничений транспортной задачи закрытого типа состоит из линейных уравнений, а также условия неотрицательности значений переменных :

Таким образом, смоделировав все аспекты, мы получаем задачу линейного программирования. Решением данной задачи является оптимальный вариант перевозок груза, обеспечивающий минимальные суммарные затраты на его доставку.

Транспортная задача имеет каноническую форму записи. В канонической записи должны одновременно соблюдаться два требования: 1) все ограничения являются равенствами; 2) все инструментальные переменные имеют неотрицательное значение. Если каким-либо способом определить исходное неотрицательное базисное решение такой задачи, то оптимальный вариант перевозок можно найти симплекс-методом.

Рассмотрим применение данного метода на примере локальной транспортной задачи для региона, располагающего тремя элеваторами и двумя мукомольными заводами. Зерно с элеваторов необходимо доставить на мукомольные предприятия, выбрав вариант с наименьшими суммарными транспортными издержками. В табл. 4 приведены исходные данные задачи.

*Таблица 4*

**Исходные данные для задачи транспортировки зерна**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Стоимость доставки одной тонны зерна, тыс.руб./т | Объем продукции к отправке на мукомольные предприятия региона, тыс. тонн |
| Мукомольный завод 1 | Мукомольный завод 2 |
| Элеватор 1 | 1,5 | 0,9 | 60 |
| Элеватор 2 | 0,7 | 0,3 | 40 |
| Элеватор 3 | 0,2 | 0,8 | 50 |
|  Объемы, запланированные к переработке с элеваторов региона, тыс. тонн  | 90 | 60 | 150 |

Пусть обозначают количества перевозимого зерна, измеряемого в тысячах тонн. Если использовать для измерения миллионы рублей, то математическая модель целевой функции задачи будет иметь вид:

Ограничения задачи представляют собой систему линейных уравнений:

Для получения исходного неотрицательного базисного решения системы уравнений воспользуемся двумя приемами. Во-первых, исключим из системы любое уравнение, например, четвертое. Это возможно, так как любое ограничение полученной нами системы уравнений можно представить как линейную комбинацию остальных ограничений в силу "закрытости" системы. Во-вторых, в последнее уравнение включим искусственную переменную . В результате в каждом ограничении получим так называемую предпочтительную переменную (предпочтительная переменная только в одно уравнение системы входит с коэффициентом 1, в остальных уравнениях она имеет нулевой коэффициент):

Введение в запись задачи искусственной переменной позволяет сформировать полный набор базисных переменных. Однако следует помнить, что в запись целевой функции также следует внести изменения. Искусственная переменная включается в запись целевой функции с помощью условного коэффициента , который обозначает бесконечно большое положительное число:

Получена новая запись модели, которую принято называть -задачей. Если - задача разрешима, то разрешима и исходная задача. Это объясняется так. Минимизируя целевую функцию, мы, в первую очередь, исключаем из состава базисных переменных . Будучи свободной переменной, принимает нулевое значение, следовательно различие между значениями функций и исчезает, а компоненты вектора оптимальных решений -задачи образуют оптимальное решение исходной задачи.

-задача решается симплекс-методом. Особенность алгоритма ее решения лишь в том, что, исключив искусственную переменную из состава базисных, мы также должны исключить из симплексной таблицы ее столбец. В таблицах 5 и 6 показан весь процесс решения. В табл. 5 заливкой выделен выбор разрешающего элемента.

*Таблица 5*

**Начальная симплексная таблица - задачи**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисныепеременные |  | Свободныечлены |  |  |  |  |  |  |  |
| 1,5 | 0,9 | 0,7 | 0.3 | 0.2 | 0,8 |  |
|  | 1,5 | 60 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | 0,7 | 40 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
|  | 0.2 | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
|  |  | 60 | 0 | **1** | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
|  | 1280+60 | 0 |  | 0 |  | 0 |  | 0 |

*Таблица 6*

**Заключительная симплексная таблица - задачи**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Базисныепеременные |  | Свободныечлены |  |  |  |  |  |  |
| 1,5 | 0,9 | 0,7 | 0.3 | 0.2 | 0,8 |
|  | 1,5 | 0 | 1 | 0 | 0 | -1 | 0 | -1 |
|  | 0,7 | 40 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
|  | 0.2 | 50 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
|  | 0,9 | 60 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
|  | 92 | 0 | 0 | 0 | -2 | 0 | -12 |

Оптимальный вариант перевозки зерна с элеваторов на мукомольные предприятия получен (см. столбец свободных членов). Общая стоимость транспортировки зерна составит 92 млн руб.

Данную задачу можно решить, используя, например, программную среду MATLAB™, в частности, для этих целей подойдет решатель задач линейного программирования linprog[[1]](#footnote-1). Рассмотрим, каким образом можно использовать возможности MATLAB™ для решения нашей задачи.

Алгоритм linprog рассчитан на решение задач минимизации с ограничениями в виде неравенств, имеющих знак ≥ . Ограничения нашей задачи – равенства. Заменим систему уравнений эквивалентной системой неравенств ( напоминаем, что ограничений на одно меньше):

Затем занесем в командное окно MATLAB™ (рис. 1) данные нашей задачи, используя установленный синтаксис программной среды:

 f=[1.5,0.9,0.7,0.3,0.2,0.8];

 A=[1 1 0 0 0 0;0 0 1 1 0 0;0 0 0 0 1 1;0 1 0 1 0 1; -1 -1 0 0 0 0; 0 0 -1 -1 0 0; 0 0 0 0 -1 -1;0 -1 0 -1 0 -1];

 b=[60;40;50;60;-60;-40;-50;-60];

lb=zeros(6,1);

 [x,fval,exitflag,output,lambda]=linprog (f,A,b,[],[],lb).

Запускаем программу нажатием Enter. Получаем ответ:

Optimization terminated.

x =

 0.0000

 60.0000

 40.0000

 0.0000

 50.0000

 0.0000

fval =

 92.0000

Таким образом, получен и оптимальный вариант транспортировки зерна, и наименьшая стоимость транспортировки.

Существуют другие алгоритмы решения транспортной задачи, которые для задач малой размерности выглядят предпочтительнее[[2]](#footnote-2). Однако на практике размерность транспортных задач достаточно велика, поэтому при их решении надежнее полагаться на алгоритмы, поддающиеся автоматизации.



Рис. 1. Внешний вид командного окна MATLAB™ с выполненным решением задачи. Справа –
 вспомогательные рабочие области программы

**Список источников**

1. Афонин В.В., Федосин С.А. Моделирование систем. - Ссылка доступа URL:http://www.intuit.ru/department/algorithms/modelsys/1/

2. Исследование операций в экономике: учеб. пособие : для студентов вузов/ под ред. Н. Ш. Кремера. - 2-е изд., перераб. и доп.. - М.: Юрайт: ИД Юрайт, 2011.

3. Исследование операций и принятие решений в экономике: сб. задач и упражнений : учеб. пособие для вузов/ В. П. Невежин, С. И. Кружилов, Ю. В. Невежин ; [под ред. В. П. Невежина]. - М.: ФОРУМ, 2012.

4. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: теория и приложения. – М.: Финансы и статистика, 2008.

5. Математические методы в управлении: учеб. пособие для вузов/ А. Н. Гармаш, И. В. Орлова. - М.: Вуз. учеб.; М.: ИНФРА-М, 2013.

6. Минько Э.В., Минько А.Э. Методы прогнозирования и исследования операций. - М.: Финансы и статистика; ИНФРА-М, 2010. -480 с.

7. Потемкин В.Г. Введение в Matlab. – Ссылка доступа URL: <http://matlab.exponenta.ru/ml/book1/index.php>

8. Потемкин В.Г. Справочник по Matlab. - Ссылка доступа URL: <http://matlab.exponenta.ru/ml/book2/index.php>

9. Самаров К.Л. Транспортная задача. Учебно-методическое пособие. ООО «Резольвента», 2009. - Ссылка доступа URL: http://www.resolventa.ru/metod/student/transproblem.htm

10. Солдатова С.Э. Математические методы и модели в управлении и финансах. – Калининград: РГУ им. И.Канта, 2009.

11. Стронгин Р.Г. Исследование операций. Модели экономического поведения. – М.: интернет ун-т иформ. технологий: БИНОМ, 2007.

12. Фомин Г. П. Методы и модели линейного программирования коммерческой деятельности: Учебное пособие. Гриф Министерства образования Российской Федерации. –М.: Финансы и статистика, 2000. – 128 с.

13. Хуснутдинов, Р. Ш. Экономико-математические методы и модели: учеб. пособие для вузов. - М.: ИНФРА-М, 2013.

14. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: учеб. пособие для вузов/ И. В. Орлова, В. А. Половников; Финанс. ун-т при Правительстве РФ. - 3-е изд., перераб. и доп.. - Москва: Вуз. учеб.; Москва: ИНФРА-М, 2014.

15. Экономико-математическое моделирование: Учебник для студентов вузов/ Под ред. И.Н. Дрогобыцкого. Гриф УМО. –М.: Экзамен, 2004. – 800 с.

1. Методы исследований в менеджменте: лабораторный практикум. Учебно-наглядное пособие для обучающихся по направлению 080200.68 "Менеджмент“ / С.Э. Солдатова, Н.Ю. Лукьянова, Л.М. Чеглакова.
Киров: Международный центр научно-исследовательских проектов, 2013. С. 29-49. [↑](#footnote-ref-1)
2. См. например: Самаров К.Л. Транспортная задача. Учебно-методическое пособие. ООО «Резольвента», 2009. URL: http://www.resolventa.ru/metod/student/transproblem.htm [↑](#footnote-ref-2)